

UNE NOUVELLE APPROCHE EXPÉRIMENTALE POUR TESTER LES MODÈLES QUANTIQUES DE L'ERREUR DE CONJONCTION

***Documents de travail GREDEG
GREDEG Working Papers Series***

SÉBASTIEN DUCHÊNE
THOMAS BOYER-KASSEM
ERIC GUERCI

GREDEG WP No. 2015-27

<http://www.gredeg.cnrs.fr/working-papers.html>

Les opinions exprimées dans la série des **Documents de travail GREDEG** sont celles des auteurs et ne reflètent pas nécessairement celles de l'institution. Les documents n'ont pas été soumis à un rapport formel et sont donc inclus dans cette série pour obtenir des commentaires et encourager la discussion. Les droits sur les documents appartiennent aux auteurs.

*The views expressed in the **GREDEG Working Paper Series** are those of the author(s) and do not necessarily reflect those of the institution. The Working Papers have not undergone formal review and approval. Such papers are included in this series to elicit feedback and to encourage debate. Copyright belongs to the author(s).*

Une nouvelle approche expérimentale pour tester les modèles quantiques de l’erreur de conjonction

Sébastien DUCHÊNE*, Thomas BOYER-KASSEM† et Eric GUERCI*

GREDEG Working Paper No. 2015–27

Résumé

La théorie classique des probabilités requiert que la probabilité de la conjonction de deux événements soit inférieure à la probabilité d’un des événements seul. Or les sujets ne jugent empiriquement pas toujours ainsi : c’est l’erreur de conjonction. L’une des explications actuellement prometteuses de ce paradoxe repose sur des modèles dits « quantiques », développés à partir des outils mathématiques de la mécanique quantique. Mais quelles versions de ces modèles peuvent précisément être employées ? En particulier, les versions les plus simples, dites non-dégénérées, peuvent-elles être suffisantes ? Cet article teste ces versions non-dégénérées à travers certaines de leurs prédictions expérimentales, au moyen d’un protocole expérimental original. Les résultats obtenus en laboratoire suggèrent que les modèles non-dégénérés ne sont pas empiriquement adéquats, et que la recherche future concernant les modèles quantiques devrait s’orienter vers les modèles dégénérés.

1 Introduction

Les jugements humains peuvent-ils être modélisés au moyen de la théorie classique des probabilités ? Autrement dit, une théorie de la rationalité peut-elle être développée avec des outils probabilistes classiques ? Les expériences réalisées ces vingt dernières années sur les processus cognitifs ont régulièrement souligné l’inadéquation expérimentale de certaines propriétés des probabilités classiques. C’est notamment le cas, du moins à première vue, pour l’erreur de conjonction, qui survient lorsqu’un sujet juge la conjonction de deux événements plus probable que l’un des événements seul. Elle est typiquement illustrée à l’aide d’une expérience réalisée par Tversky et Kahneman (1982, 1983) commençant par la description suivante :

« Linda a 31 ans, elle est célibataire, franche, et très brillante. Elle est diplômée en philosophie. Lorsqu’elle était étudiante, elle se sentait très concernée par les questions de discrimination et de justice sociale et avait aussi participé à des manifestations anti-nucléaires. »

*GREDEG (UMR 7321: CNRS, Université de Nice Sophia Antipolis), 250 rue Albert Einstein, 06560 Valbonne, France. E-mail: sebastien.duchene@gredeg.cnrs.fr, eric.guerci@gredeg.cnrs.fr

†Tilburg Center for Logic and Philosophy of Science, Tilburg University, PO Box 90153, 5000 LE Tilburg, The Netherlands, et Archives H. Poincaré (UMR 7117: CNRS, Université de Lorraine), 91 avenue de la Libération, 54000 Nancy, France. E-mail: thomas.boyer@univ-lorraine.fr.

Les sujets sont ensuite invités à classer des propositions suivant leur degré de probabilité, parmi lesquelles figurent notamment les deux suivantes :

- (1) « Linda est employée de banque »,
- (2) « Linda est féministe et employée de banque ».

De nombreux sujets jugent (2) plus probable que (1). Cela constitue un paradoxe pour une théorie du jugement s'appuyant sur des probabilités classiques, qui requièrent qu'une conjonction de deux événements soit inférieure à l'un des événements qui la composent.

Un tel résultat expérimental a éveillé la curiosité des psychologues et économistes, qui en ont établi la robustesse au moyen de nombreux protocoles expérimentaux (cf. notamment Gavanski et Roskos-Ewoldsen 1991, Hertwig 1997, Mellers, Hertwig et Kahnemann 2001, Stolarz-Fantino *et al.* 2003, Hertwig, Benz et Krauss 2008, Moro 2009, Kahneman 2011, Tentori et Crupi 2013). Cette erreur de conjonction a notamment été observée avec des thématiques variées (sujets médicaux, crimes, événements sportifs, catastrophes naturelles, jeux de dés), sur des conjonctions de trois événements ou lorsque les propositions à évaluer ne sont pas précédées par des descriptions. L'erreur de conjonction persiste également avec des protocoles où l'évaluation de conjonctions est répétée pour tester l'effet d'apprentissage, ou lorsque les probabilités de (1) et de (2) sont évaluées par des sujets différents. L'impact de cette erreur de conjonction dans la prise de décision a été étudié en économie expérimentale, pour des paris sportifs (Nilsson et Anderson 2010, Erceg et Galic 2014), lorsque les sujets reçoivent une incitation monétaire et lorsque la discussion en groupe est autorisée (Charness, Karni et Levin 2010).

Comment cette erreur de conjonction peut-elle être expliquée ? Différentes explications ont été avancées, sans qu'aucune ne s'impose véritablement. Tversky et Kahneman ont initialement proposé une heuristique de représentativité, Gavanski *et al.* (1991) ou Nilsson *et al.* (2009) ont considéré que la probabilité d'une conjonction était évaluée à partir d'une combinaison des probabilités respectives de chaque événement qui la compose, et von Sydow (2011) Hartmann et Meijs (2012), Tentori, Crupi et Rosso (2013) ont proposé des explications dans un cadre bayésien. Une autre explication, à laquelle nous nous intéressons dans cet article, repose sur des modèles quantiques. Ceux-ci font partie d'une famille plus large de modèles quantiques de la cognition qui utilisent les mathématiques de la mécanique quantique et qui ont été appliqués à de nombreux jugements paradoxaux (cf. par exemple Busemeyer et Bruza 2012, Haven et Khrennikov 2013 ; pour une revue voir Pothos et Busemeyer 2013, Ashtiani et Azgomi 2015). Ils offrent ainsi un cadre théorique nouveau en théorie de la décision et en rationalité limitée (Danilov et Lambert-Mogiliansky 2008 et 2010, Yukalov et Sornette 2011). Ces modèles quantiques proposent une théorie des probabilités qui n'est pas classique, dans laquelle des amplitudes de probabilités peuvent interférer, de sorte que certaines probabilités deviennent supérieures à celles calculées avec les probabilités classiques. Ainsi, plusieurs modèles quantiques affirment rendre compte de l'erreur de conjonction (Franco 2009, Yukalov et Sornette 2011, Busemeyer *et al.* 2011, Busemeyer et Bruza 2012, Pothos et Busemeyer 2013, Trueblood *et al.* 2014).

L'adéquation empirique des modèles quantiques est, depuis quelques années, une source d'attention particulière (e. g. Tentori et Crupi 2013, Tentori, Crupi et Rosso 2013, Pothos et Busemeyer 2013, Busemeyer *et al.* 2015, Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci 2015). Dans cet article, nous étudions l'adéquation empirique des modèles quantiques de l'erreur de conjonction, avec deux objectifs. Premièrement, la version

exacte des modèles utilisés, ou la valeur des paramètres, n'est pas toujours spécifiée, comme la dimensionalité de l'espace vectoriel qui est utilisée pour représenter les croyances. Les modèles les plus simples, dits « non-dégénérés », peuvent-ils être suffisants, ou des modèles plus complexes, avec un nombre plus grand de dimensions et dits « dégénérés », sont-ils requis ? La littérature existante est plutôt favorable aux modèles dégénérés car le grand nombre de dimensions devrait permettre de mieux représenter la complexité du processus cognitif, et elle a tendance à considérer les modèles non-dégénérés comme des modèles seulement illustratifs (Busemeyer *et al.* 2015). Cependant, le choix entre les deux types de modèles n'a pas été définitivement arrêté et, comme la simplicité des modèles est une qualité recherchée, il pourrait être intéressant de disposer d'un test simple permettant de déterminer si les modèles non-dégénérés peuvent convenir. Boyer-Kassem *et al.* (2015) ont proposé un tel test pour les modèles quantiques de l'effet d'ordre : peut-il s'adapter à ceux de l'erreur de conjonction ? Deuxièmement, les modèles quantiques de l'erreur de conjonction impliquent-ils de nouvelles prédictions en-dehors des données qu'ils sont censés expliquer ? Cela permettrait de les tester à nouveaux frais.

Avec ces deux objectifs, nous présentons en section 2 une description unifiée et cohérente de la majorité des modèles quantiques non-dégénérés de la littérature expliquant l'erreur de conjonction, puis introduisons en section 3 des prédictions empiriques qui peuvent servir de test. Nous proposons en section 4 un nouveau protocole expérimental permettant de réaliser ce test. Nous avons réalisé l'expérience en laboratoire, et les résultats, présentés en section 5, suggèrent que les modèles non-dégénérés ne peuvent rendre compte de l'erreur de conjonction. Dans la section 6, nous discutons de la possibilité des modèles dégénérés pour les recherches futures.

2 Comment les modèles quantiques expliquent l'erreur de conjonction

Plusieurs modèles utilisant le formalisme mathématique de la mécanique quantique ont été proposés pour rendre compte de l'erreur de conjonction, dont un grand nombre repose sur les mêmes postulats (Franco 2009, Busemeyer *et al.* 2011, Busemeyer et Bruza 2012, Pothos et Busemeyer 2013)¹. Cette section présente ces modèles en ne considérant que leur version non-dégénérée — nous discuterons de la version dégénérée dans la section 6. L'expérience de Linda est prise pour exemple, mais la généralisation à d'autres erreurs de conjonction est évidente.

Pour évaluer la probabilité des propositions (1) et (2), un sujet va considérer deux questions :

Q_F : « Linda est-elle féministe ? »,

Q_B : « Linda est-elle employée de banque ? ».

Le modèle mathématique met en jeu un espace vectoriel complexe, dans lequel sont représentées les croyances de l'agent et les réponses aux questions. Les vecteurs $\vec{F}_o$ et $\vec{F}_n$ correspondent respectivement aux réponses « oui » et « non » à la question Q_F , et de même pour les vecteurs $\vec{B}_o$ et $\vec{B}_n$ pour la question Q_B . $(\vec{F}_o, \vec{F}_n)$ et $(\vec{B}_o, \vec{B}_n)$ constituent ainsi deux bases d'un espace vectoriel à deux dimensions. Cet espace est équipé du produit scalaire (devenant un espace de Hilbert) : pour deux vecteurs $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$, le produit scalaire $\vec{Y} \cdot \vec{Z}$ est un nombre complexe. Les deux bases

1. Ces articles présentent des modèles dans des versions à la fois non-dégénérées et dégénérées, à l'exception de Franco (2009) qui considère seulement des versions non-dégénérées.

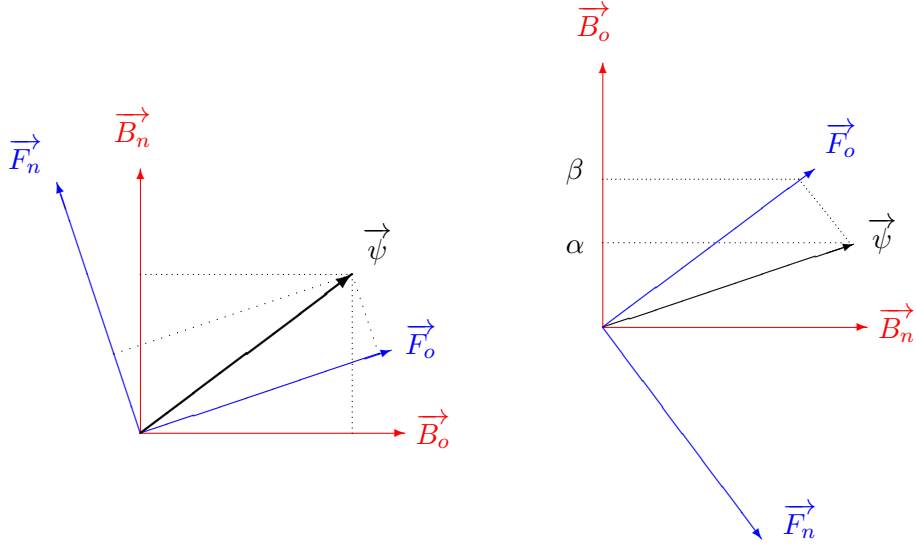


FIGURE 1 – [Gauche] Le vecteur d'état $\vec{\psi}$ peut être décomposé sur les deux bases orthonormales $(\vec{B}_o, \vec{B}_n)$ et $(\vec{F}_o, \vec{F}_n)$. [Droite] Illustration de l'explication quantique de l'expérience de Linda. Ces graphiques supposent un espace de Hilbert réel.

évoquées précédemment sont supposées être orthonormales. Les croyances de l'agent sont représentées par un vecteur normalisé $\vec{\psi}$, appelé « vecteur d'état », qui peut être décomposé dans chacune des deux bases (cf. figure 1g).

La donnée du vecteur d'état $\vec{\psi}$ permet au modèle quantique de prédire les réponses du sujet de façon probabiliste. La probabilité de répondre par exemple « oui » à la question Q_B s'obtient en projetant tout d'abord orthogonalement $\vec{\psi}$ sur $\vec{B}_o$, puis en prenant le module carré de cette longueur : $p(B_o) = |\vec{B}_o \cdot \vec{\psi}|^2$. Géométriquement, plus $\vec{\psi}$ est aligné avec un vecteur de base $\vec{X}_i$, plus grande est la probabilité que l'agent réponde i à la question Q_X .

Le vecteur d'état $\vec{\psi}$ ne change que lorsque le sujet répond à une question Q_X , selon un postulat dit de projection : le nouvel état est proportionnel au vecteur $\vec{X}_i$ représentant la réponse X_i donnée (formellement, $\vec{\psi} \mapsto (\vec{X}_i \cdot \vec{\psi}) / |\vec{X}_i \cdot \vec{\psi}| \cdot \vec{X}_i$). Par exemple, sur la figure 1g, si un agent répond « oui » à la question Q_B , l'état passe de $\vec{\psi}$ à $\vec{B}_o$. Ainsi, l'état après la réponse à une question est en général différent de l'état avant la question. Ceci est une différence fondamentale avec le point de vue classique, dans lequel la réponse à une question est censée révéler une croyance pré-existante et donc rester la même avant et après la question.

Ce modèle est dit « non-dégénéré », car la réponse i à une question Q_X est représentée par un vecteur $\vec{X}_i$, et donc potentiellement aussi par tout vecteur $\lambda \vec{X}_i$ ($|\lambda| = 1$), autrement dit par un sous-espace de dimension 1, dans un espace de Hilbert de dimension 2. La littérature a également considéré des modèles dits « dégénérés », dans lesquels la réponse à une question est représentée par un sous-espace de dimension strictement supérieure à 1. L'espace de Hilbert ne se limite alors pas à la dimension 2 comme ici. Nous reviendrons sur cette possibilité dans la section 6.

À partir de ce modèle quantique, l'explication de l'erreur de conjonction est la suivante. D'une part, pour évaluer la probabilité de la proposition (1) « Linda est employée de banque », l'agent considère la question Q_B « Linda est-elle employée de banque ? ». Le modèle quantique prédit la probabilité $p(B_o)$ pour la réponse « oui »,

qui vaut, pour la figure 1d, $p(1) = |\alpha|^2$. D'autre part, pour évaluer la probabilité de la conjonction (2) « Linda est employée de banque et féministe », l'agent considère successivement les questions Q_F (« Linda est-elle féministe ? ») et Q_B (« Linda est-elle employée de banque ? »), en commençant par la question de l'événement qui semble le plus probable, ici Q_F , car la description de Linda la rend plus vraisemblablement féministe qu'employée de banque². Sur la figure 1d, la probabilité de répondre « oui » aux deux questions correspond au carré de la projection de $\vec{\psi}$ sur deux vecteurs successifs, tout d'abord sur $\vec{F}_o$ puis sur $\vec{B}_o$, de telle sorte que $p(2) = |\beta|^2$. Ainsi, il existe certaines configurations des vecteurs de base et du vecteur d'état pour lesquelles un agent évalue la probabilité que Linda soit féministe et employée de banque comme étant supérieure à la probabilité qu'elle soit employée de banque ($p(1) < p(2)$). L'erreur de conjonction est expliquée par ce modèle quantique³.

3 Un nouveau test expérimental pour les modèles non-dégénérés : les équations de grand-réciprocité

Le modèle quantique de la section précédente prédit qu'une conjonction peut être plus probable qu'un seul des deux termes. Dans sa version non-dégénérée, il implique aussi d'autres prédictions empiriques, comme l'ont établi Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci (2015) pour un modèle similaire utilisé dans l'explication de l'effet d'ordre. Il est bien connu que le modèle implique une loi dite de réciprocité⁴, qui énonce que pour $(X, Y) \in \{B, F\}^2$, et $(i, j) \in \{o, n\}^2$, $p(Y_j|X_i) = p(X_i|Y_j)$. Autrement dit, les probabilités conditionnelles d'une réponse sachant une autre réponse sont les mêmes quel que soit l'ordre des questions⁵. Cette loi quantique n'est pas vraie de manière générale dans un modèle classique, dans lequel $p(Y_j|X_i) = p(X_i|Y_j) \times p(Y_j)/p(X_i)$, donc $p(Y_j|X_i) \neq p(X_i|Y_j)$ dès que $p(Y_j) \neq p(X_i)$. À partir de cette loi de réciprocité, et pour un modèle non-dégénéré, Boyer-Kassem *et al.* (2015, Section 3.1) ont établi des équations dites de grand-réciprocité, notées équations GR, que l'on exprime ici dans le cas de Linda :

$$\begin{cases} p(B_o|F_o) = p(F_o|B_o) = p(B_n|F_n) = p(F_n|B_n), & (1) \\ p(B_n|F_o) = p(F_o|B_n) = p(B_o|F_n) = p(F_n|B_o). & (2) \end{cases}$$

Ces équations sont équivalentes entre elles et équivalentes à la loi de réciprocité elle-même. Le modèle quantique présenté en section 2 laisse très peu de liberté aux probabilités conditionnelles : parmi les huit quantités qui peuvent être mesurées expérimentalement, il y a seulement un paramètre réel libre.

2. L'hypothèse est faite que c'est le même vecteur d'état $\vec{\psi}$ qui est utilisé comme vecteur initial pour évaluer les deux propositions (1) et (2). Par exemple dans Franco (2009, p. 418-419), les probabilités $P(F_o)$ et $P(B_o)$ (notées $P(a_1)$ et $P(b_1)$) sont calculées à partir du même vecteur d'état initial (noté $|s\rangle$). Busemeyer *et al.* (2011, p. 212) considèrent comme plausible l'hypothèse selon laquelle l'agent se réfère à l'histoire originelle de Linda entre plusieurs évaluations, ce qui signifie qu'il reprend le même vecteur d'état. Dans Pothos et Busemeyer (2013, p. 264), l'hypothèse selon laquelle le même vecteur d'état est utilisé est implicite, par exemple sur la figure 2 p. 264.

3. La valeur du vecteur d'état $\vec{\psi}$ est ici calculée de façon *ad hoc*, la littérature ne proposant pas d'autres tests de sa valeur. Cependant, la position relative des bases peut quant à elle recevoir une justification théorique (voir par exemple Pothos et Busemeyer 2013, p. 316).

4. Voir par exemple Franco (2009, 417–418), Wang et Busemeyer (2009, 697–698), Busemeyer *et al.* (2011, 197), Pothos et Busemeyer (2013, 317), Wang *et al.* (2014, 5).

5. Il s'agit ici des probabilités conditionnelles, et non des probabilités conjointes utilisées pour estimer un effet d'ordre.

Ces équations sont-elles vérifiées expérimentalement ? Dans la négative, un modèle non-dégénéré tel que présenté dans la section précédente ne pourrait prétendre rendre compte de l’erreur de conjonction. À notre connaissance, le fait que les probabilités conditionnelles soient contraintes par les équations GR n’a pas été remarqué jusqu’à maintenant pour les modèles quantiques qui entendent rendre compte de l’erreur de conjonction (Boyer-Kassem *et al.* 2015 considèrent seulement les modèles d’effet d’ordre). Nous proposons ici de tester expérimentalement ces nouvelles prédictions empiriques. Comme les données requises n’existent pas dans la littérature, nous avons réalisé une nouvelle expérience.

4 Protocole expérimental

Tester les équations GR suppose de réaliser une expérience d’effet d’ordre en posant à des agents différents les questions Q_F puis Q_B , ou Q_B puis Q_F . Cela revient, pour l’ordre Q_F puis Q_B , à forcer l’agent à suivre le processus cognitif supposé par les modèles quantiques lors de l’évaluation d’une conjonction, puisqu’ils doivent répondre successivement aux deux questions. Il s’agit donc d’un protocole original conçu pour suivre au plus près le processus explicatif quantique. Nous en proposons ici la première réalisation expérimentale.

Pour tester les équations GR de façon robuste, nous avons considéré l’histoire de Linda, mais aussi 3 autres histoires connues pour donner lieu à une erreur de conjonction. L’expérience est ainsi constituée de 4 tâches — que nous appellerons « K. », « Monsieur F. », « Bill » et « Linda » —, chacune comportant un texte suivi de deux questions.

La première tâche est tirée de l’histoire de « K. » (Tentori et Crupi 2013) :

- Texte : « K. est une femme russe. »
- Q_N : « Selon vous⁶, K. vit-elle à New York ? »
- Q_I : « Selon vous, K. est-elle une interprète ? »

La deuxième tâche est tirée de l’histoire de « Monsieur F. » (Tversky et Kahneman 1983) :

- Texte : « Une enquête de santé a été menée en France sur un échantillon représentatif d’hommes adultes de tous âges et de toutes professions. Dans cet échantillon, on a choisi au hasard Monsieur F. »
- Q_M : « Selon vous, Monsieur F. a-t-il plus de 55 ans ? »
- Q_H : « Selon vous, Monsieur F. a-t-il déjà eu une ou plusieurs attaques cardiaques ? »

La troisième tâche est tirée de l’histoire de « Bill » (Tversky et Kahneman 1983) :

- Texte : « Bill a 34 ans. Il est intelligent, mais n’a pas d’imagination, il est compulsif, et généralement plutôt éteint. À l’école, il était fort en mathématiques, mais faible dans les sciences humaines et sociales. »
- Q_A : « Selon vous, Bill est-il comptable ? »
- Q_J : « Selon vous, Bill joue-t-il du jazz pour ses loisirs ? »

La quatrième tâche est celle de Linda.

Pour assurer la robustesse de l’expérience, nous avons pris soin de considérer à la fois des erreurs de conjonction de type « MA » (K., Bill et Linda) et de type « AB »

6. Les termes « selon vous » précédant la question proprement dite ont été ajoutés afin que les sujets ne tentent pas de s’interroger sur l’éventuelle existence d’une réponse correcte. Ils traduisent par ailleurs l’idée de la consigne initiale de Tversky et Kahnemann (1983) d’évaluer une caractéristique en fonction de sa probabilité, ce qui suppose ici une part subjective du jugement.

(Monsieur F.), selon la classification classique des erreurs de conjonction (Tversky et Kahneman 1983)⁷.

Nous avons jugé important d'effectuer les expériences en laboratoire en respectant les « bonnes pratiques expérimentales » de recrutement aléatoire en ligne et de rémunération des étudiants. Nous les avons donc indemnisés pour leur participation (à hauteur de 5 ou 9 euros selon le campus d'origine des étudiants) afin de réduire le risque de biais de sélectivité. Les sujets ont été recrutés parmi les étudiants de toutes les disciplines de l'université de Montpellier (économie, sociologie, pharmacie, lettres...). L'expérience a été réalisée au laboratoire montpellierain d'économie théorique et appliquée (LAMETA) les 17 et 28 avril 2015, avec 20 sessions impliquant 302 élèves. Toutes les précautions ont été prises afin d'éviter les discussions entre les sujets ayant effectué l'expérience et ceux ne l'ayant pas encore effectuée.

L'expérience a été implémentée sur ordinateur, à l'aide du programme Z-Tree (Fischbacher 2007). Les sujets, après avoir été installés devant un ordinateur, ont reçu de brèves instructions orales précisant que plusieurs questions leur seraient posées à la suite de textes descriptifs. Les 4 tâches ont été présentées l'une après l'autre à chaque sujet. La structure du protocole est identique pour chaque tâche ; nous la présentons sur celle de Linda. Chaque tâche se décline en 2 traitements, un sujet n'en recevant qu'un seul : l'un des traitements contient les questions dans l'ordre Q_F puis Q_B , l'autre dans l'ordre Q_B puis Q_F ⁸. Un premier écran affiche le texte de description de Linda. Si le sujet reçoit le traitement Q_F puis Q_B , un second écran pose la question Q_F avec le choix entre les réponses « oui » ou « non ». Un troisième écran pose la question Q_B avec le choix entre les réponses « oui » ou « non ». Si le sujet reçoit le traitement Q_B puis Q_F , les écrans 2 et 3 sont intervertis.

Notre protocole propose successivement 4 tâches à chaque agent : n'y a-t-il pas le risque qu'une tâche perturbe les suivantes ? Deux arguments permettent de répondre négativement. Expérimentalement tout d'abord, Stolartz-Fantino *et al.* (2003) ont proposé six tâches de conjonction, et n'ont pas observé de différence significative du taux d'erreur de conjonction au fil des tâches. Il ne semble donc pas y avoir d'effet d'apprentissage pour l'erreur de conjonction, ou d'influence entre tâches. La successivité des tâches est également justifiée théoriquement : les modèles quantiques de l'erreur de conjonction font l'hypothèse que, lorsque les thèmes des histoires et les représentations mentales que s'en fait l'agent sont suffisamment éloignés les uns des autres, ce qui semble très clairement être le cas ici, les bases vectorielles des différentes caractéristiques (Linda est féministe, Bill est joueur de jazz, ...) sont compatibles au sens mathématique de la mécanique quantique, ce qui implique qu'il ne peut y avoir d'effet d'ordre *entre* les différentes tâches (voir par exemple Wang et Busemeyer 2013). Autrement dit, les modèles quantiques eux-mêmes affirment qu'il n'y a pas d'influence d'une tâche sur l'autre, dans ce cas présent, et que l'ordre des tâches n'affecte pas les résultats. Il se peut que cette affirmation soit empiriquement erronée, mais peu importe : comme ici nous cherchons seulement à tester ces modèles quantiques, et non pas à établir des résultats expérimentaux valables en-dehors de ces modèles, il est légitime de s'appuyer sur ces hypothèses issues des modèles eux-mêmes. Les modèles quantiques justifient donc notre protocole expérimental qui les

7. Dans le paradigme MA, un modèle M (e. g. le texte décrivant Linda) est positivement associé avec un événement A (e. g. Linda est féministe) et négativement avec un autre événement B (e. g. Linda est employée de banque). Dans le paradigme AB, A (e. g. Monsieur F. a eu une ou plusieurs attaques cardiaques) est positivement associé avec B (e. g. Monsieur F. a plus de 55 ans) et n'est pas représentatif de M (le texte décrivant Monsieur F.).

8. Ainsi, le protocole de notre expérience peut être qualifié de *between subjects*.

teste, et cela suffit.

5 Résultats

Les fréquences conjointes obtenues lors de l'expérience sont présentées dans l'annexe A. À partir de ces résultats, l'équation 1 GR à tester est :

$$p(B_o|F_o) = p(F_o|B_o) = p(B_n|F_n) = p(F_n|B_n). \quad (3)$$

Les probabilités conditionnelles de cette équation sont estimées en considérant les fréquences conditionnelles $f(F_i|B_j)$ et $f(B_j|F_i)$, que l'on peut calculer à partir des fréquences conjointes. L'équation 3 est équivalente à 6 tests T1-T6 de comparaisons deux à deux, avec l'hypothèse nulle que les fréquences conditionnelles sont égales entre elles. Le détail du test statistique se trouve en annexe B.

Le tableau 1 présente le résultat des tests. Pour chacune des 4 tâches, 3 tests ou plus parmi les 6 rejettent l'hypothèse nulle de l'égalité entre les deux fréquences conditionnelles — alors qu'un seul rejet est suffisant pour établir que les équations GR ne sont pas vérifiées. L'interprétation de ces résultats est claire : les modèles non-dégénérés ne peuvent rendre compte des prédictions empiriques observées dans notre expérience pour les 4 tâches d'erreur de conjonction.

TABLE 1 – Valeurs- p ajustées pour les tests T1 à T6 réalisés sur les 4 différentes tâches. Le rejet est indiqué en gras avec un seuil de signification de 5%. La dernière colonne reporte le nombre de rejets par tâche.

Tâche	T1	T2	T3	T4	T5	T6	#R à 5%
K.	0,37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,59	4
Monsieur F.	0,01	4,95	0,43	0,00	0,00	0,09	3
Bill	0,00	0,00	0,00	0,13	0,02	0,00	5
Linda	0,13	3,13	0,09	0,00	0,00	0,00	3

6 Discussion

Nous avons considéré ici des modèles quantiques qui entendent rendre compte de l'erreur de conjonction (Franco 2009, Busemeyer *et al.* 2011, Busemeyer et Bruza 2012, Pothos et Busemeyer 2013). Nous avons introduit les équations de grand-réciprocité (GR), qui permettent de tester l'adéquation empirique des modèles quantiques non-dégénérés. Nous avons ensuite réalisé une expérience inédite, qui est une variation autour des expériences classiques de l'erreur de conjonction, permettant de tester ces équations GR. Les résultats expérimentaux que nous avons obtenus montrent nettement que ces équations GR ne sont pas vérifiées, et donc que ces modèles quantiques non-dégénérés ne sont pas adéquats d'un point de vue empirique, et ne peuvent prétendre rendre compte de l'erreur de conjonction pour les 4 histoires considérées. Ceci confirme certaines intuitions de la littérature (e. g. Busemeyer *et al.* 2015) selon lesquelles les modèles non-dégénérés doivent surtout avoir un rôle illustratif. Nous avons considéré ici des histoires variées, appartenant aux

deux types d'erreur de conjonction distingués (AB et MA), ce qui suggère fortement que les erreurs de conjonction *en général* ne sont pas explicables par des modèles quantiques non-dégénérés.

Au-delà du rejet des modèles quantiques non-dégénérés, quelles suggestions constructives pouvons-nous proposer ? Tout d'abord, nous avons clairement indiqué que les tests réalisés ici ne concernent que les modèles non-dégénérés. Or rappelons que Busemeyer et al. 2011, Busemeyer et Bruza 2012, Pothos et Busemeyer 2013 considèrent également des modèles dégénérés. Ceux-ci n'étant pas exclus par nos résultats, ils apparaissent comme une voie légitime et prometteuse pour rendre compte de l'erreur de conjonction, comme ils le sont pour rendre compte par exemple de l'effet d'ordre (cf. Busemeyer, Wang et Lambert Mogiliansky 2009, Boyer-Kassem *et al.* 2015). Dans cette optique, il serait intéressant de tester l'égalité dite « QQ » (Wang et Busemeyer 2013, Wang *et al.* 2014) qui est une conséquence des modèles quantiques du type considéré ici, qu'ils soient dégénérés ou non.

Cependant, le fait de passer à des modèles dégénérés n'est pas sans difficulté potentielle, car ceux-ci ne sont pas *a priori* libres de toute contrainte (cf. Boyer-Kassem *et al.* 2015) : en particulier, s'il existe des questions fondamentales dont les réponses sont représentées par des sous-espaces de dimension 1 (cf. Pothos et Busemeyer 2013), alors les modèles dégénérés peuvent être testés au moyen d'équations GR généralisées ; par ailleurs, les dimensions supplémentaires de dégénérescence devraient recevoir une justification à la fois empirique et théorique afin que les modèles ne puissent pas être accusés d'être *ad hoc*. Les modèles quantiques de la cognition apparaissent néanmoins comme étant un champ de recherche prometteur : le cadre probabiliste non-classique qu'ils ont introduit semble pouvoir s'appliquer à de nombreux jugements paradoxaux, et la modélisation quantique a également permis de renouveler l'étude de la notion d'indétermination des préférences (cf. Section 1). Il nous semble donc que les modèles dégénérés méritent une attention particulière dans le futur.

Enfin, comme indiqué en introduction, les modèles quantiques ne sont pas les seuls candidats à l'explication de l'erreur de conjonction. La démarche adoptée dans cet article peut aisément s'étendre aux autres explications : il s'agira de chercher à tester leurs modèles à partir des prédictions nouvelles qu'ils formulent. L'économie expérimentale a ici un rôle clé à jouer dans le test des différentes explications de l'erreur de conjonction, qu'elles soient quantiques ou non.

(remerciements ajoutés après évaluation)

Références

- ASHTIANI, Mehrdad et Mohammad A. AZGOMI (2015), « A survey of quantum-like approaches to decision making and cognition », *Mathematical Social Sciences* 75 : 49–80.
- BOYER-KASSEM, Thomas, Sébastien DUCHÊNE et Éric GUERCI (2015), « Testing quantum-like models of judgment for question order effects », GREDEG working paper 2015-06, <http://www.gredeg.cnrs.fr/working-papers.html>.
- BUSEMEYER, Jerome R., Zheng J. WANG, et Ariane LAMBERT-MOGILIANSKY (2009), « Empirical comparison of Markov and quantum models of decision making », *Journal of Mathematical Psychology* 53 : 423–433.
- BUSEMEYER, Jerome R., Emmanuel M. POTHOS, Riccardo FRANCO et Jennifer S. TRUEBLOOD (2011), « A Quantum Theoretical Explanation for Probability Judgment Errors », *Psychological Review* 118 (2) : 193–218.
- BUSEMEYER, Jerome R. et Peter D. BRUZA (2012), *Quantum models of Cognition and Decision*, Cambridge : Cambridge University Press.
- BUSEMEYER, Jerome R., Zheng J. WANG, Emmanuel M. POTHOS et Jennifer S. TRUEBLOOD (2015), « The Conjunction Fallacy, Confirmation, and Quantum Theory : Comment on Tentori, Crupi, and Russo (2013) », *Journal of Experimental Psychology : General*, Vol. 144, No. 1, 236–243.
- CHARNESS, Gary, Edi KARNI, et Dan LEVIN (2010), « On the conjunction fallacy in probability judgment : New experimental evidence regarding Linda », *Games and Economic Behavior* 68 : 551–556.
- DANILOV, Vladimir I. et Ariane LAMBERT-MOGILIANSKY (2008), « Measurable systems and behavioral sciences », *Mathematical Social Sciences* 55(3) : 315–340.
- DANILOV, Vladimir I. et Ariane LAMBERT-MOGILIANSKY (2010), « Expected utility theory under non-classical uncertainty », *Theory and Decision* 68(1) : 25–47.
- ERCEG, Nikola et Zvonimir GALIC (2014), « Overconfidence bias and conjunction fallacy in predicting outcomes of football matches », *Journal of Economic Psychology* 42 : 52–62.
- FISCHBACHER, Urs (2007), « Z-tree : Zurich toolbox for ready-made economic experiments », *Experimental Economics* 10(2) : 171–178.
- FRANCO, Riccardo (2009), « The conjunction fallacy and interference effects », *Journal of Mathematical Psychology* 53 : 415–422.
- HAVEN, Emmanuel et Andrei KHRENNIKOV (2013), *Quantum Social Science*, Cambridge : Cambridge University Press.
- HARTMANN, Stephan et Wouter MEIJS (2012), « Walter the banker : the conjunction fallacy reconsidered », *Synthese* 184 : 73–87.
- HERTWIG, Ralph (1997), « Judgment under uncertainty : Beyond probabilities », Berlin, Germany : Max Planck Institute for Human Development. Unpublished manuscript.
- HERTWIG, Ralph, Björn BENZ et Stefan KRAUSS (2008), « The conjunction fallacy and the many meanings of and », *Cognition* 108 : 740–753.
- KAHNEMAN, Daniel (2011), *Thinking, Fast and Slow*, New York : Farrar, Straus and Giroux.
- MELLERS, Barbara, Ralph HERTWIG et Daniel KAHNEMAN (2001), « Do frequency representations eliminate conjunction effects? An Exercise in Adversarial Collaboration », *Psychological Science* 12 : 269–275.
- MORO, Rodrigo (2009), « On the nature of the Conjunction Fallacy », *Synthese* 171 : 1–24.

- NILSSON, Håkan, Anders WINMAN, Peter JUSLIN et Göran HANSSON, G. (2009), “Linda is not a bearded lady : Configural weighting and adding as the cause of extension errors”, *Journal of Experimental Psychology : General*, 138, 517–534.
- NILSSON, Håkan, et Patric ANDERSSON (2010), « Making the seemingly impossible appear possible : Effects of conjunction fallacies in evaluations of bets on football games », *Journal of Economic Psychology* 31 : 172–180.
- POTHOS, Emmanuel M. et Jerome R. BUSEMEYER (2013), « Can quantum probability provide a new direction for cognitive modeling? », *Behavioral and Brain Sciences* 36 : 255–327.
- STOLARZ-FANTINO, Stephanie, Edmund FANTINO, Daniel J. ZIZZO, et Julie WEN (2003), « The conjunction effect : New evidence for robustness », *American Journal of Psychology* 116(1) : 15–34.
- TENTORI, Katya et Vincenzo CRUPI (2012), « How the conjunction fallacy is tied to probabilistic confirmation : Some remarks on Schupbach (2009) », *Synthese* 184 : 3–12.
- TENTORI, Katya et Vincenzo CRUPI (2013), « Why quantum probability does not explain the conjunction fallacy (comment) », *Behavioral and Brain Sciences* 36(3) : 308–310.
- TENTORI, Katya, Vincenzo CRUPI et Selena RUSSO (2013), “On the Determinants of the Conjunction Fallacy : Probability Versus Inductive Confirmation”, *Journal of Experimental Psychology : General*, Vol. 142, No. 1, 235–255.
- TVERSKY, Amos et Daniel KAHNEMAN (1982), « Judgments of and by representativeness », in : *Judgment under uncertainty : Heuristics and biases*, ed. by D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky, p. 84–98, Cambridge University Press.
- (1983), « Extensional versus intuitive reasoning : The conjunction fallacy in probability judgment », *Psychological Review* 90(4) : 293–315.
- VON SYDOW, Momme (2011), « The Bayesian logic of frequency-based conjunction fallacies », *Journal of Mathematical Psychology* 55 : 119–139.
- WANG, Zheng J. et Jerome R. BUSEMEYER (2013), « A quantum question order model supported by empirical tests of an a priori and precise prediction », *Topics in Cognitive Science* 5(4) : 689–710.
- WANG, Zheng J., Tyler SOLLOWAY, Richard M. SHIFFRIN et Jerome R. BUSEMEYER (2014), « Context effects produced by question orders reveal quantum nature of human judgments », *PNAS*, www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1407756111.
- YUKALOV, Vyacheslav I. et Didier SORNETTE (2011), « Decision theory with prospect interference and entanglement », *Theory and Decision*, 70 : 283–328.

A Résultats : tableau de contingence

Les résultats de l'expérience sont indiqués dans le tableau 2.

TABLE 2 – Tableau de contingence des fréquences conjointes pour chaque tâche, pour l'un et l'autre ordre des questions ($n(X_i, Y_j)$ représente la fréquence des réponses X_i suivies de Y_j).

Tâche	K.	Monsieur F.	Bill	Linda
(Q_X, Q_Y)	(Q_N, Q_I)	(Q_M, Q_H)	(Q_C, Q_J)	(Q_B, Q_F)
$n(X_o, Y_o)$	0,09	0,10	0,06	0,01
$n(X_o, Y_n)$	0,08	0,22	0,55	0,01
$n(X_n, Y_o)$	0,11	0,10	0,06	0,67
$n(X_n, Y_n)$	0,72	0,58	0,33	0,31
$n(Y_o, X_o)$	0,07	0,11	0,13	0,03
$n(Y_n, X_o)$	0,06	0,23	0,53	0,01
$n(Y_o, X_n)$	0,16	0,05	0,08	0,54
$n(Y_n, X_n)$	0,71	0,61	0,26	0,42

B Test statistique

Tester l'éq. 1 revient à tester 6 comparaisons 2 à 2 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{T1 :} & f(B_o|F_o) = f(F_o|B_o), \\ \text{T2 :} & f(B_o|F_o) = f(B_n|F_n), \\ \text{T3 :} & f(B_o|F_o) = f(F_n|B_n), \\ \text{T4 :} & f(F_o|B_o) = f(B_n|F_n), \\ \text{T5 :} & f(F_o|B_o) = f(F_n|B_n), \\ \text{T6 :} & f(B_n|F_n) = f(F_n|B_n). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{array}$$

Le test statistique de ces 6 équations s'appuie sur celui proposé dans Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci (2015). Chaque test compare deux fréquences conditionnelles y et x , avec l'hypothèse nulle qu'elles sont égales. D'un point de vue statistique, il est pratique de tester l'égalité de leur logit : $\log\left(\frac{y}{1-y}\right) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$, ce qui est équivalent à tester le logarithme de l'odds ratio égal à zéro : $\log(\text{OR}) = \log\left(\frac{x(1-y)}{(1-x)y}\right) = 0$. La distribution d'échantillonnage du logarithme de l'odds ratio X , sous l'hypothèse de l'approximation d'un grand échantillon, est approximativement normale : $X \sim \mathcal{N}(\log(\text{OR}), \sigma^2)$. Au lieu de tester directement des fréquences conditionnelles, le logarithme de l'odds ratio permet facilement d'exprimer ces dernières sous forme de fréquences conjointes $n(X_i, Y_j)$. Par exemple, au lieu de tester T1 (eq. 4), nous pouvons tester :

$$\log(\text{OR}) = \log\left(\frac{n(F_o, B_o)n(B_o, F_n)}{n(F_o, B_n)n(B_o, F_o)}\right) = 0. \quad (10)$$

Une correction de continuité est ensuite appliquée, parce que l'approximation normale de la loi binomiale est utilisée, celle-ci étant efficace pour de petites valeurs de

$n(F_i, B_j)$ ou $n(B_j, F_i)$. Le test ci-dessus devient :

$$\log(\text{OR}) = \log \left(\frac{(n(F_o, B_o) + 0.5)(n(B_o, F_n) + 0.5)}{(n(F_o, B_n) + 0.5)(n(B_o, F_o) + 0.5)} \right) = 0. \quad (11)$$

Nous supposons ici que :

$$\frac{\log(\text{OR})}{\text{SE}_{\log \text{OR}}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (12)$$

où $\text{SE}_{\log \text{OR}}$ est l'erreur type du logarithme de l'odds ratio qui est estimé comme la racine carré de la somme de l'inverse de toutes les fréquences conjointes qui sont considérées dans l'estimation de l'OR :

$$\text{SE}_{\log \text{OR}} = \sqrt{\frac{1}{n(F_o, B_o)} + \frac{1}{n(B_o, F_n)} + \frac{1}{n(F_o, B_n)} + \frac{1}{n(B_o, F_o)}}. \quad (13)$$

Finalement, une correction d'erreur de type I de Bonferroni est appliquée en raison des comparaisons multiples (six). Notons que cette correction statistique est très conservatrice, c'est-à-dire que les rejets de faux positifs sont beaucoup moins susceptibles de se produire. Concrètement, le test bilatéral implique l'hypothèse nulle de l'égalité entre les deux fréquences conditionnelles au seuil de signification de $K\%$. L'hypothèse est rejetée si :

$$p = 2 \cdot \left(1 - \text{CDF}_{\text{stdNorm}} \left(\left| \frac{\log(\text{OR})}{\text{SE}_{\log \text{OR}}} \right| \right) \right) \leq \frac{K}{100} \quad (14)$$

où $\text{CDF}_{\text{stdNorm}}$ est la fonction de répartition de la distribution normale standard (moyenne = 0, écart type = 1). Finalement, nous réalisons le test en estimant la valeur- p ajustée avec la correction de Bonferroni avec :

$$p_{\text{ajust}} = 6 \cdot p. \quad (15)$$

DOCUMENTS DE TRAVAIL GREDEG PARUS EN 2015

GREDEG Working Papers Released in 2015

- 2015-01 LAETITIA CHAIX & DOMINIQUE TORRE
The Dual Role of Mobile Payment in Developing Countries
- 2015-02 MICHAËL ASSOUS, OLIVIER BRUNO & MURIEL DAL-PONT LEGRAND
The Law of Diminishing Elasticity of Demand in Harrod's Trade Cycle (1936)
- 2015-03 MOHAMED AROURI, ADEL BEN YOUSSEF & CUONG NGUYEN
Natural Disasters, Household Welfare and Resilience: Evidence from Rural Vietnam
- 2015-04 SARAH GUILLOU & LIONEL NESTA
Markup Heterogeneity, Export Status and the Establishment of the Euro
- 2015-05 STEFANO BIANCHINI, JACKIE KRAFFT, FRANCESCO QUATRARO & JACQUES RAVIX
Corporate Governance, Innovation and Firm Age: Insights and New Evidence
- 2015-06 THOMAS BOYER-KASSEM, SÉBASTIEN DUCHÊNE & ERIC GUERCI
Testing Quantum-like Models of Judgment for Question Order Effects
- 2015-07 CHRISTIAN LONGHI & SYLVIE ROCHHIA
Long Tails in the Tourism Industry: Towards Knowledge Intensive Service Suppliers
- 2015-08 MICHAEL DIETRICH, JACKIE KRAFFT & JOLIAN MCHARDY
Real Firms, Transaction Costs and Firm Development: A Suggested Formalisation
- 2015-09 ANKINÉE KIRAKOZIAN
Household Waste Recycling: Economics and Policy
- 2015-10 FRÉDÉRIC MARTY
Régulation par contrat
- 2015-11 MURIEL DAL-PONT LEGRAND & SOPHIE POMMET
Nature des sociétés de capital-investissement et performances des firmes : le cas de la France
- 2015-12 ALESSANDRA COLOMBELLI, JACKIE KRAFFT & FRANCESCO QUATRARO
Eco-Innovation and Firm Growth: Do Green Gazelles Run Faster? Microeconomic Evidence from a Sample of European Firms
- 2015-13 PATRICE BOUGETTE & CHRISTOPHE CHARLIER
La difficile conciliation entre politique de concurrence et politique industrielle : le soutien aux énergies renouvelables
- 2015-14 LAUREN LARROUY
Revisiting Methodological Individualism in Game Theory: The Contributions of Schelling and Bacharach
- 2015-15 RICHARD ARENA & LAUREN LARROUY
The Role of Psychology in Austrian Economics and Game Theory: Subjectivity and Coordination
- 2015-16 NATHALIE ORIOLE & IRYNA VERYZHENKO
Market Structure or Traders' Behaviour? An Assessment of Flash Crash Phenomena and their Regulation based on a Multi-agent Simulation
- 2015-17 RAFFAELE MINIACI & MICHELE PEZZONI
Is Publication in the Hands of Outstanding Scientists? A Study on the Determinants of Editorial Boards Membership in Economics
- 2015-18 CLAIRE BALDIN & LUDOVIC RAGNI
L'apport de Pellegrino Rossi à la théorie de l'offre et de la demande : une tentative d'interprétation

- 2015-19** CLAIRE BALDIN & LUDOVIC RAGNI
Théorie des élites parétienne et moment machiavélien comme principes explicatifs de la dynamique sociale : les limites de la méthode des approximations successives
- 2015-20** ANKINÉE KIRAKOZIAN & CHRISTOPHE CHARLIER
Just Tell me What my Neighbors Do! Public Policies for Households Recycling
- 2015-21** NATHALIE ORIOL, ALEXANDRA RUFINI & DOMINIQUE TORRE
Should Dark Pools be Banned from Regulated Exchanges?
- 2015-22** LISE ARENA & RANI DANG
Organizational Creativity versus Vested Interests: The Role of Academic Entrepreneurs in the Emergence of Management Education at Oxbridge
- 2015-23** MURIEL DAL-PONT LEGRAND & HARALD HAGEMANN
Can Recessions be 'Productive'? Schumpeter and the Moderns
- 2015-24** ALEXANDRU MONAHOV
The Effects of Prudential Supervision on Bank Resiliency and Profits in a Multi-Agent Setting
- 2015-25** BENJAMIN MONTMARTIN
When Geography Matters for Growth: Market Inefficiencies and Public Policy Implications
- 2015-26** BENJAMIN MONTMARTIN, MARCOS HERRERA & NADINE MASSARD
R&D Policies in France: New Evidence from a NUTS3 Spatial Analysis
- 2015-27** SÉBASTIEN DUCHÊNE, THOMAS BOYER-KASSEM & ERIC GUERCI
Une nouvelle approche expérimentale pour tester les modèles quantiques de l'erreur de conjonction